SUPPLÉMENT A LA NOTICE

SUR LES

TRAVAUX SCIENTIFIQUES

DE

M. Marcel BRILLOUIN,
PROFESSEUR DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE AU COLLÈGE DE FRANCE.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1910



LISTE CHRONOLOGIQUE

DES PUBLICATIONS DE M. MARCEL BRILLOUIN.

(Suite 1904-1910.)

79. 1904. Aimantation au contact et structure cristalline.
Ann. Chim. et Phys., t. III, p. 305.

80. 1905. Indétermination de la trajectoire limite des planeurs rigides.
C. R., t. CXL, p. 570.

81. 1905. Le mouvement de la Terre et la vitesse de la lumière.
C. R., t. CXL, p. 1674.

82. 1905. Correspondance de Volta et van Marum.
Journal des Savants, 1905.

83. 1905. Inertie des électrons.
C. R., t. CXLI, p. 942.

84. 1905. Boltzmann. Théorie des gaz, 2e Partie, 2 Notes : Sur les conditions de l'état permanent. Sur la tendance apparente à l'irréversibilité d'après Gibbs.
Paris, Gauthier-Villars.

85. 1906. Les courbures du géoïde dans le tunnel du Simplon.
C. R., t. CXLII, p. 916.

86. 1906. Les courbures du géoïde dans le tunnel du Simplon.
C. R., t. CXLIII, p. 405.

87. 1906. Mouvements du pôle à la surface de la Terre.
C. R., t. CXLIII, p. 437.

88\. 1906. Considérations théoriques sur la dissociation électrolytique. Influence du dissolvant sur la stabilité des molécules dissoutes.
Ann. Chim. et Phys., t. VII, p. 289.

89\. 1906. Sur la propagation du son dans les gros tuyaux cylindriques, à propos des expériences de MM. Violle et Vauthier.
Ann. Chim. et Phys., t. VIII, p. 443.

90\. 1907. Sur l'équipartition de l'énergie cinétique moléculaire.
Journ. de Phys., t. VI, p. 32.

91\. 1907. Chaleurs spécifiques du vide.
Journ. de Phys., t. VI, p. 34.

92\. 1907. Leçons sur la viscosité des liquides et des gaz.
Première Partie, 224 pages. Généralités. Liquides.
Deuxième Partie, 140 pages. Gaz. Théories moléculaires.
Paris, Gauthier-Villars.

93\. 1907. Note sur les aéroplanes, titre seul, renvoyée à la Commission aéronautique.
C. R., t. CXLIV, p. 664.

94\. 1907. Sur la viscosité des fluides.
C. R., t. CXLIV, p. 1151.

95\. 1908. Mémoire sur les courbures du géoïde dans le tunnel du Simplon.
Mém. des Sav. étrangers, t XXIII, 228 pages.

96\. 1908. Lord Kelvin.
Revue du Mois, t. V, p. 257.

97\. 1908. Sur la résistance des fluides; les expériences nécessaires.
C. R., t. CXLVII, p. 918.

98\. 1909. Sur la stabilité des aéroplanes, 4 articles.
Revue de Mécanique, Dunod et Pinat.

99\. 1909. Notice sur un gyro-accéléromètre. (Exposition internationale de locomotion aérienne.)
Établissements H. Lepaute; *voir* aussi *Bull. des Séances de la Soc. de Phys.*, 1910.

100. 1909. Notes de thermodynamique.

Ann. Chim. et Phys., t. XVIII, p. 191.

101. 1909. La viscosité des liquides en fonction de la température.

Ann. Chim. et Phys., t. XVIII, p. 197.

102. 1909. L'énergie cinétique moléculaire et la température absolue.

Ann. Chim. et Phys., t. XVIII, p. 387.

103. 1910. Stabilité des aéroplanes. Surface métacentrique. 62 pages; suivi de deux Notes :

I. Mouvements permanents des planeurs rigides, p. 63-71.

II. Quelques caractères de la résistance des fluides, p. 72-77.

Paris, Dunod et Pinat.

104. 1910. Des fonctions données par leur valeur sur une partie de la frontière et par la valeur de leur dérivée normale sur le reste de cette frontière. Développements correspondants.

C. R., t. 150, p. 461.

105. 1910. Questions de Physique mathématique comportant des conditions différentes sur diverses parties d'une même frontière.

C. R., t. 150, p. 611.

106. 1910. Hydrodynamique. Obstacles courbes.

C. R., t. 151, p. 931.

I. — HYDRODYNAMIQUE ET AÉRODYNAMIQUE.

(Page 13.)

80. 1905. **Indétermination de la trajectoire limite des planeurs rigides. — 93.** 1907. **97.** 1908. **Sur la résistance des fluides; les expériences nécessaires. — 98.** 1909. **103.** 1910. **Stabilité des aéroplanes. Surface métacentrique. — 99.** 1909. **Gyro-accéléromètre.**

L'apparition du Livre de Chanute m'avait fourni en 1895 l'occasion de parler des progrès des machines volantes (n° 39) et de formuler sur la stabilité de l'énorme machine de Maxim une opinion basée sur des considérations théoriques inédites. A la suite des remarquables travaux de Bryan (1904) et du regretté Capitaine Ferber, relatifs seulement à la stabilité *étroite* des planeurs rigides, c'est-à-dire à leurs petits mouvements autour de leur attitude permanente, il m'a paru utile de publier, en leur donnant plus d'étendue et de précision, les indications théoriques que j'avais obtenues autrefois, et qui sont relatives à une question sensiblement différente, celle de la stabilité *étendue*, pour des perturbations infiniment lentes (98-103). Aucune donnée ni expérimentale, ni théorique, ne permet encore de trouver, comme pour les navires, toutes les attitudes stables que peut prendre un planeur de construction donnée, ou plus généralement de construire la surface métacentrique correspondante. Les données connues sur la résistance de l'air permettent seulement de construire une *courbe* métacentrique correspondant à la translation de l'aéroplane dans un plan de symétrie. Les courbes que j'ai calculées ou construites dans divers cas montrent que, suivant la position du centre de gravité, il peut y avoir une, deux ou même trois attitudes stables de l'aéroplane, et autant d'instables.

L'existence possible d'attitudes stables autres que l'attitude de service courant est très dangereuse; un coup de vent peut en effet faire passer de l'attitude de service à la deuxième ou à la troisième attitude stable, sans que la manœuvre des gouvernails soit capable de ramener à l'attitude normale. La route permanente relative à la nouvelle attitude peut être très

différente de la première, surtout si, comme il est très probable, des circonstances analogues se présentent pour les inclinaisons latérales. Dans ce cas la chute descendante en hélice de pas très court (80-103) peut devenir irrémédiable. Le danger général de l'existence de plusieurs positions d'équilibre stable se complique en effet d'un autre danger particulier aux aéroplanes qui ont un plan de symétrie vertical. Sous certaines conditions de construction, dont la définition dynamique est facile (103, p. 70), il peut arriver qu'au lieu d'un mouvement permanent unique indépendant des conditions initiales, *une infinité de mouvements hélicoïdes permanents* se rattachant d'une manière continue au mouvement rectiligne, et dépendant des conditions initiales, soient également possibles ; un changement d'inclinaison latérale une fois produit par un coup de vent latéral bref se conserve alors après cessation du coup de vent ; le coup de vent produit, outre des variations amorties, un changement permanent de trajectoire ; c'est un défaut grave auquel on peut remédier au besoin à l'aide de plans de dérive.

Il est évidemment utile que les manœuvres de passage d'une allure ou d'une attitude à une autre se fassent sans oscillations. J'ai pu énoncer des règles relatives aux déplacements du métacentre par suite de ces différentes manœuvres, qui permettront, à l'aide des constructions dont j'ai indiqué le principe, de déterminer à l'avance la nature et la grandeur des déformations à faire subir à l'aéroplane pour éviter les oscillations. Pour y remédier efficacement, j'ajoute que le pilote doit s'exercer à percevoir les *accélérations*.

Faute de documents expérimentaux suffisants, toutes ces considérations sont actuellement limitées aux mouvements de translation dans le plan de symétrie. Il m'a paru nécessaire d'indiquer toute l'étendue des expériences indispensables pour que la stabilité *étendue* d'un aéroplane projeté puisse être prévue, car les expérimentateurs même les plus avisés ne parlent que d'un petit nombre de *coefficients*, tandis qu'il faudrait connaître 18 fonctions de quatre angles de direction, et du pas de la trajectoire hélicoïde permanente, pour un corps arrondi ; pour les surfaces portantes à bords minces, il y a en outre une délicate question de discontinuité de ces fonctions à discuter (97-103).

Il serait évidemment de la plus haute importance de recueillir sur les aéroplanes en service des documents relatifs à leur stabilité. Pour la stabilité étendue, cela ne paraît pas possible jusqu'à présent ; pour la stabilité étroite, c'est-à-dire pour l'étude des petits mouvements qui succèdent à

une perturbation, j'ai fait construire un instrument très simple et robuste qui permet de voir ou d'*enregistrer* les *accélérations angulaires, sans aucun repère extérieur*. Ce *gyro-accéléromètre,* d'abord étudié au laboratoire, sera prochainement mis en essai effectif. La partie essentielle de l'appareil est un disque de grand moment d'inertie, mobile autour de son axe de symétrie, et maintenu dans sa position moyenne par un puissant ressort spiral; en raison de l'inertie de la masse, le ressort s'enroule ou se déroule un peu quand une accélération angulaire est communiquée à la boîte de l'appareil; une multiplication convenable met en évidence les moindres déformations du ressort. L'appareil a fonctionné sous les yeux des membres de la Société de Physique (3 juin 1910). Si on le fixe sur un disque auquel on communique un mouvement de rotation uniformément accéléré, dès le début du mouvement l'aiguille saute instantanément à une déviation qu'elle conserve pendant tout le mouvement, même à la vitesse finale de 5 ou 6 tours par seconde. Avec cet instrument, que j'ai rendu enregistreur, on pourra déterminer les 9 constantes qui définissent la stabilité dynamique étroite d'un aéroplane en service, et par conséquent reconnaître le bénéfice ou le danger de telle ou telle modification.

106. Mouvement discontinu d'Helmholtz. Obstacles courbes.

Propositions générales. — I. Lorsqu'on met des obstacles fixes dans un courant liquide uniforme et permanent de vitesse U, si l'on adopte la solution *continue* de l'Hydrodynamique classique, l'énergie cinétique de la masse liquide contenue à l'intérieur d'une très grande surface fermée reste la même quels que soient les obstacles fixes, bien que la masse liquide soit généralement diminuée par la présence des obstacles.

II. Dans le mouvement avec surface de discontinuité d'Helmholtz l'énergie cinétique est moindre que dans le mouvement continu pour le même obstacle. La différence est d'autant plus grande que l'on considère une frontière plus éloignée en aval; elle est supérieure au produit de la force vive $\frac{\rho U^2}{2}$ de l'unité de volume du courant uniforme par le volume de liquide stagnant en aval.

III. Les conditions d'Helmholtz rendent minimum l'excès de l'énergie cinétique du liquide en mouvement permanent discontinu, sur l'énergie

cinétique que possédait dans le mouvement uniforme sans obstacle le volume occupé par le liquide en mouvement d'Helmholtz (à l'exclusion du volume de l'obstacle et du volume de liquide stagnant en aval).

Ces propriétés se démontrent sans difficulté; il faut seulement apporter quelque attention au choix des conditions à la frontière extérieure pour la troisième proposition.

Obstacles courbes. — M. Levi-Cività a donné dans le *Circolo matematico di Palermo* (1906) la solution la plus générale pour un obstacle courbe (en gouttière), dans le cas des mouvements discontinus plans d'Helmholtz.

Dans cette solution figure une série entière d'une variable auxiliaire, à coefficients réels arbitraires; mais cette série est encore trop générale.

J'ai reconnu que le rayon de courbure de la ligne de glissement, au point où elle se détache de l'obstacle, est *nul* dans le cas général, ce qui exige que l'obstacle ait des bords tranchants. Pour que la ligne de glissement puisse se détacher d'un obstacle en un point où la courbure est finie (véritable proue), il faut que les coefficients de la série satisfassent à deux conditions (une pour chaque bord) que j'ai données dans mes Leçons du Collège de France. Certaines inégalités sont, en outre, nécessaires. L'une d'elles exprime que la vitesse du liquide est partout inférieure à la vitesse du courant général. L'autre est d'un caractère beaucoup plus caché et est apparue sur un exemple particulier : à mesure que les coefficients croissent, l'obstacle devient concave vers le courant et ses bords se recourbent en volutes de plus en plus nombreuses; il en est de même de la ligne de glissement qui s'en détache; mais, à partir d'une certaine limite, ces deux courbes à volutes (qui s'obtiennent par une quadrature) se coupent, ce qui rend impossible la réalisation matérielle du mouvement.

Dans le cas le plus simple, obstacle continu symétrique défini par le premier terme de la série pris seul, j'ai déterminé, en partie par des calculs numériques, en partie par des graphiques, la forme exacte de la section droite de l'obstacle et la résistance qu'il oppose au courant.

89. 1906. **Sur la propagation du son dans les gros tuyaux cylindriques : à propos des expériences de MM. Violle et Vauthier.**

J'avais donné, au Congrès de 1900, l'explication des singulières observations de MM. Violle et Vauthier sur la propagation des sons aigus dans

les gros tuyaux (63, p. 15); il m'a paru utile d'en faire l'étude numérique. Cette discussion montre l'exactitude de l'explication proposée et, en outre, la nécessité d'obtenir un mode d'émission des sons parfaitement défini pour que les résultats soient réguliers.

II. — ACTIONS MOLÉCULAIRES.

(Page 16.)

L'IRRÉVERSIBILITÉ EN MÉCANIQUE RATIONNELLE.

79. 1904. **Aimantation au contact et structure cristalline.**

M. Maurain a montré que, lorsqu'on dépose du fer électrolytique en couche mince sur un aimant, dans une région où le champ magnétique est nul ou même de sens contraire à l'intensité d'aimantation, les couches minces déposées ont une intensité considérable de même sens que l'aimant. L'influence de l'aimant décroît très rapidement avec la distance; lorsqu'on a déposé d'abord une couche mince d'un métal non magnétique (cuivre, or, argent) au delà d'un dixième de micron environ, l'influence du champ extérieur devient prédominante. Les aimants moléculaires libérés par l'électrolyse à la surface de l'aimant, nu ou revêtu d'une mince enveloppe non magnétique, sont donc soumis à une action directrice autre que celle due à l'ensemble du champ magnétique, puisque les premières couches s'orientent dans un sens opposé au champ et défini par l'intensité d'aimantation de l'électrode. C'est la nature de cette action que je discute.

Pour qu'une loi d'action polaire, plus compliquée à petite distance que celle de Coulomb, intervienne dans les expériences de Maurain, il faut que la structure de l'aimant cathode soit granulaire. Je montre d'abord que la loi de Coulomb seule ne peut pas suffire; ni par sa distribution, ni par sa grandeur, le champ produit au contact par un aimant prodigieusement petit et puissant, au milieu d'un granule non magnétique relativement immense, ne peut donner les résultats de Maurain. Il faut donc imaginer des actions magnéto-magnétiques nouvelles, très intenses à petite distance. J'examine des actions ayant un potentiel magnétique $Q\frac{e^{-\lambda r}}{r}$ par unité de masse magnétique.

Si l'on admet λ réel, l'énormité des valeurs de Q nécessaires est tout à fait inadmissible. Si, au contraire, on admet λ imaginaire, et si l'on prend une action élémentaire dont le potentiel soit $Q\frac{\cos\lambda' r}{r}mm'$, ajoutée à $\frac{mm'}{r}$ que donne la loi de Coulomb, le coefficient Q peut être petit positif, pourvu que la période $\frac{2\pi}{\lambda'}$ soit extrêmement peu supérieure à la distance longitudinale de deux molécules aimantées consécutives, et l'on rend compte de tous les caractères de l'expérience de Maurain.

J'indique, en terminant, les expériences qu'il serait intéressant de faire comme contrôle : ce sont toutes celles dans lesquelles on fait varier (par exemple par traction) la distance des molécules sans faire varier $\frac{2\pi}{\lambda'}$.

Le phénomène de Maurain et l'action que je propose pour l'expliquer sont certainement liés à la stabilité du magnétisme permanent. De quelque façon qu'on s'y prenne, l'existence d'aimants permanents exige une action magnétique à petite distance (autre que celle de Coulomb) qu'on introduit en bloc sous le nom de *champ coercitif* ou de *champ moléculaire*. Les expériences de Maurain mettent directement cette action en évidence : l'action que je propose paraît apte à expliquer en particulier la disparition du champ coercitif au delà d'une certaine température ; car cette action ne s'exerce dans un domaine un peu étendu que si $\frac{2\pi}{\lambda'}$ est *supérieur* à la distance moléculaire ; elle disparaît donc quand la dilatation thermique rend la distance moléculaire supérieure à $\frac{2\pi}{\lambda'}$. Si différent que paraisse ce point de vue de celui que les études micrographiques ont conduit à adopter, il ne me paraît pas faire avec lui double emploi, ni s'y opposer.

———

THÉORIE DES GAZ.

92. 1907. **Leçons sur la viscosité des liquides et des gaz. — 94.** 1907. **Sur la viscosité des fluides. — 101.** 1909. **La viscosité des fluides en fonction de la température. — 84.** 1905. **Notes à la traduction de Boltzmann. — 90.** 1907. **Sur l'équipartition de l'énergie moléculaire. — 102.** 1909. **L'énergie cinétique moléculaire et la température absolue.**

La théorie moléculaire des gaz n'avait été l'objet, en France, que de Mémoires isolés et de quelques Chapitres nécessairement un peu sommaires dans des Ouvrages ayant un programme beaucoup plus vaste. Un exposé excellent avait été publié, en 1895 et 1898, par le savant éminent qui, après Clausius et Maxwell, a le plus contribué à donner de la précision aux calculs difficiles qu'exige cette théorie. J'ai fait traduire ces *Vorlesungen*, de Boltzmann, par deux de mes anciens élèves, et j'y ai ajouté une introduction et quelques notes sur les points qui me paraissaient les plus délicats (84). Une des notions qui ont acquis le plus d'importance dans les développements récents de cette théorie, et qui a été créée de toutes pièces par Boltzmann, est celle de l'entropie mathématique définie par des considérations de probabilités. J'ai cru nécessaire de rappeler ce qu'il y a d'un peu arbitraire dans la définition des cas également probables, et aussi d'émettre quelques réserves au sujet de certaines subtilités de langage relatives aux théories de l'irréversibilité.

Dans les innombrables applications qu'on fait, depuis une dizaine d'années, des modes de raisonnement de la théorie cinétique, soit à diverses questions de physico-chimie, soit aux théories électriques, on admet toujours et en toute circonstance que la température absolue mesure l'énergie cinétique d'une molécule (plus exactement, d'une liberté dans la molécule), bien que cette propriété ne soit établie que pour les milieux peu denses, comme les gaz. Je suis revenu à plusieurs reprises sur le caractère arbitraire de cette hypothèse, et j'ai donné des raisons de penser que la température absolue, dans les corps de grande densité, est proportionnelle au produit de l'énergie cinétique d'une molécule par un facteur qui dépend de la densité.

Le Traité de Boltzmann est purement théorique; les phénomènes dans l'explication desquels la théorie s'est montrée la plus puissante : viscosité, diffusion, conductibilité, ont fait l'objet de nombreux travaux expérimentaux; il m'a paru utile d'en faire une étude méthodique approfondie, en me plaçant au point de vue expérimental; j'ai commencé par les *Leçons sur la viscosité des liquides et des gaz* (92). C'est seulement à la fin du Volume II (Livre IV), et comme conclusion, que j'ai donné un aperçu des théories moléculaires de la viscosité des liquides et des gaz, et des conséquences qu'on peut tirer de la loi de variation en fonction de la température. Pour les gaz, la formule de Sutherland, rigoureusement d'accord avec l'expérience, dépend de la loi d'attraction moléculaire et fait connaître une constante d'attraction pour chaque corps, simple ou composé. La comparaison des valeurs de ces constantes, pour les gaz actuellement étudiés dans une grande étendue de températures, m'a conduit, après une discussion simple et facile à suivre, aux conclusions provisoires suivantes :

Il est probable qu'il existe une loi universelle d'attraction entre atomes, aux distances moléculaires ; la dérivée seconde de $\log C$, par rapport à la distance, est petite et décroissante. C est la constante de Sutherland, égale et de signe contraire à l'énergie mutuelle de deux molécules au contact.

Le coefficient de la loi universelle d'attraction est le produit de deux facteurs, dont chacun dépend d'une seule molécule. Le facteur de chaque molécule est la somme des facteurs dus aux atomes composants; ces facteurs sont beaucoup moins différents que les poids atomiques, et sans relation avec ceux-ci.

Pour les liquides j'ai fait, ou fait faire, de nombreux calculs numériques, à deux points de vue différents, en prenant comme point de départ les excellentes déterminations expérimentales de Thorpe et Rodger.

D'abord, sans préoccupations théoriques, et en traitant directement les nombres observés, j'ai montré que, pour les corps qui ne présentent pas dans leurs autres propriétés d'anomalies connues, la formule de Graetz $\eta = A\frac{t-t_1}{t+t_0}$ représente *très bien* la viscosité observée jusqu'au point d'ébullition (c'est-à-dire dans toute l'étendue des observations). Pour les corps qui présentent des anomalies considérables de tension superficielle aux basses températures (eau, alcool méthylique) la formule de Graetz donne une viscosité trop forte aux basses températures. Pour les corps de poids moléculaire élevé et de constitution compliquée, comme le diméthyléthyl-

carbinol, une bonne représentation a été obtenue par la formule

$$\eta = A\sqrt{273 + t}\,\frac{(t - t_1)^2 + c}{(t + t_0)^2 + c'},$$

dont la forme est inspirée par des considérations cinétiques.

Au point de vue des théories moléculaires, je n'ai obtenu qu'un demi-succès. Pour les liquides, les formules de divers types que les vues théoriques du Chapitre III conduisent à essayer, ne m'ont donné que des concordances passables, et je n'ai pas réussi, jusqu'à présent, à les améliorer suffisamment ; peut-être faut-il en chercher la raison dans l'hypothèse classique relative à la température absolue, que j'ai continué à adopter dans tous ces calculs numériques ; c'est un travail qui mérite d'être poursuivi, car pour l'ensemble de l'état fluide, les formules de pur type théorique donnent, depuis l'état gazeux jusqu'à une densité voisine de celle de l'eau, une très remarquable concordance avec les belles observations de Warburg sur l'anhydride carbonique (92 et 94).

III. — THERMODYNAMQUE.

(Page 24.)

91. 1907. **Chaleurs spécifiques du vide. — 100.** 1909. **Notes de Thermodynamique.**

91. La théorie thermodynamique du rayonnement exige que le milieu qui transmet le rayonnement posséde une chaleur spécifique à volume constant de

$$6,85.10^{-22}\,\Theta^3$$

en appelant Θ la température absolue du rayonnement en ce point; à 4000° absolus, cette chaleur spécifique est la même que celle d'un gaz sous une pression de deux dix-millioniémes d'atmosphère, à peine au delà de la limite des meilleurs vides artificiels. Ces propriétés du rayonnement doivent intervenir dans les phénomènes présentés par la couronne solaire, et plus généralement à la limite de l'atmosphère des astres incandescents.

100. Je montre que la connaissance thermodynamique complète d'un corps particulier quelconque peut être obtenue uniquement par des expériences d'élasticité, les unes statiques, les *autres adiabatiques*, lorsqu'on possède un thermomètre gradué en températures absolues. Les expériences de détente adiabatique sont certainement plus faciles que les expériences calorimétriques, aux températures extrêmes; de là l'importance pratique de la propriété énoncée.

IV. — ÉLASTICITÉ.

(Page 38.)

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE.

104. 1910. **Des fonctions données par leur valeur sur une partie de la frontière et par leur dérivée normale sur le reste de cette frontière. Développements correspondants. — 105.** 1910. **Questions de Physique mathématique comportant des conditions différentes sur diverses parties d'une même frontière.**

L'équation aux dérivées partielles de Laplace, à deux ou trois variables, a joué, dans le développement des Mathématiques au dernier siécle, un rôle prépondérant. Tous les problémes de Physique mathématique qu'on sait aborder dépendent de cette équation, ou s'y rattachent étroitement. Pour les équations de ce genre, on sait comment aborder deux types de problémes simples, ceux dans lesquels la fonction est donnée sur la frontière, et ceux dans lesquels la dérivée normale de la fonction est donnée sur la frontiére; plus généralement on peut traiter les cas où il existe sur la frontiére une relation linéaire entre la fonction et sa dérivée normale, pourvu que les coefficients de cette relation ne s'annulent en aucun point de la frontière.

Dans un grand nombre de questions qui dépendent d'une ou de plusieurs fonctions définies par des équations aux dérivées partielles (hydrodynamique, conduction de la chaleur, électrostatique, électromagnétisme, optique, élasticité), il serait utile ou nécessaire de trouver les fonctions au moyen de leur valeur sur une partie de la frontière, et de la valeur de leur dérivée normale sur le reste de la frontière; plus généralement, au moyen de relations linéaires, entre les fonctions et leurs dérivées, de plusieurs formes différentes valables chacune sur une région particulière de la frontière. C'est ce problème général dont je me suis occupé dans plusieurs

Leçons (1910) au Collège de France. J'ai donné le principe de la solution générale en deux Notes aux *Comptes rendus;* dans les Leçons j'ai indiqué comment il faut généraliser la notion de suites *fermées* pour être assuré de la convergence des développements, et j'en ai fait l'application à la théorie rigoureuse de la diffraction sonore par les réseaux sous l'incidence normale. Sous la forme où je l'ai donnée, la solution permet de traiter facilement les questions, auparavant inabordables, dans lesquelles un même milieu est séparé incomplètement en deux régions par une surface mince imperméable, perforée d'ouvertures variées (problèmes analogues à la diffraction) quand la surface est fermée et ne présente pas de singularités. L'étendue illimitée de la surface, ou la présence de certaines singularités, oblige à remplacer les suites de polynomes dont j'ai donné la loi de formation, par des intégrales définies, mais je n'ai rien publié encore à ce sujet.

Je crois que ce travail étend à un nombre considérable de questions importantes l'action des méthodes mathématiques précises.

V. — ÉLECTRICITÉ THÉORIQUE ET APPLIQUÉE.

(Page 41.)

83. 1905. **Inertie des électrons. — 88.** 1906. **Considérations théoriques sur la dissociation électrolytique. Influence du dissolvant sur la stabilité des molécules dissoutes.**

83. M. Max Abraham a montré qu'un électron *sphérique rigide* en mouvement de translation quasi uniforme possède deux coefficients d'inertie distincts; j'ai montré dans cette Note que si l'électron a une forme quelconque rigide, ses coefficients d'inertie sont au nombre de cinq; non seulement la force n'est pas dans la direction de l'accélération, mais elle n'est même pas dans le plan osculateur à la trajectoire.

Ces résultats, ainsi que ceux encore inédits relatifs à l'inertie de rotation de l'électron, devraient être complétés aujourd'hui, en raison de la déformation que subit, comme on sait, l'électron par suite de sa vitesse.

88. Discussion de l'influence du pouvoir diélectrique du solvant sur la stabilité des molécules dissoutes. L'augmentation du pouvoir diélectrique du solvant diminue la stabilité de la molécule dissoute; mais à ne considérer que des états d'équilibre, sans agitation thermique, il ne semble pas que cette diminution de stabilité puisse aller jusqu'à rendre la molécule instable, et à la séparer en ions. C'est seulement grâce à l'agitation thermique que la dissociation en ions est possible, et elle est d'autant plus facile que le pouvoir diélectrique du solvant est plus grand.

VI. — OPTIQUE.

(Page 46.)

81. 1905. **Le mouvement de la Terre et la vitesse de la lumière.**

Dans mes Leçons de 1904-1905 au Collège de France, j'avais exposé la plupart des travaux relatifs à l'influence du mouvement de la Terre sur les phénomènes optiques et électriques, tant au point de vue théorique qu'au point de vue expérimental; le caractère absolument général de ce qu'on a appelé depuis le *principe de relativité* était encore en discussion. MM. Wien et Schweitzer avaient proposé (décembre 1904) une méthode expérimentale qui semblait capable de déceler le mouvement par rapport à l'éther; j'ai montré que leur illusion provenait d'un lapsus de raisonnement et que l'expérience projetée n'était pas moins impuissante que les autres.

VII. — CHRONOMÉTRIE ET GRAVITATION.

(Page 48.)

85. 86. 1906. **Les courbures du géoïde dans le tunnel du Simplon. — 95.** 1908. **Mémoire sur les courbures du géoïde dans le tunnel du Simplon.**

J'avais donné depuis plusieurs années déjà, à l'appareil imaginé par M. Eötvös, une forme particulièrement adaptée aux mesures rapides de l'ellipticité du géoïde [1], lorsque vers la fin de 1905 j'appris par M. Ch.-Ed. Guillaume que le tunnel du Simplon serait livré pendant 5 jours au travail des géodésiens; grâce à la courtoisie de la Commission géodésique suisse j'ai pu faire en même temps une série de mesures satisfaisantes.

La différence des courbures principales du géoïde et leur direction se déterminent en observant les déviations d'un balancier rectiligne horizontal suspendu à un fil de torsion, pour diverses orientations de l'appareil; en principe, c'est une balance de Cavendish dont les masses attirantes constituées par les inégalités du sol sont fixes; on change leur action sur le balancier en faisant tourner toute la balance dans différents azimuts au lieu de faire tourner les masses attirantes autour de la balance.

Au balancier est fixé le spath mobile de la combinaison biréfringente qui me sert à lire les déviations (74); la lame demi-onde et le second spath sont fixés à la partie inférieure d'une colonne métallique creuse dont l'axe est occupé par le fil de torsion suspendu à la partie supérieure de la colonne. Cette colonne repose dans le reste de l'appareil par l'intermédiaire de couches d'ouate et de feutre, qui ne transmettent aucune vibration. Le reste de l'appareil optique est fixé à la boîte extérieure.

Une triple enceinte métallique établit l'uniformité de la température intérieure lorsque la variation de la température extérieure n'est pas trop

[1] *Notice*, 1904, p. 49-50.

rapide. Tout l'appareil est mobile autour d'un axe vertical; il est muni de niveaux et d'une lunette auxiliaire pour fixer l'azimut.

L'appareil étant installé sur un solide trépied en bois, on fait des mesures de déviation dans 5 azimuts de 45° en 45°, la dernière servant de contrôle.

Grâce à un amortissement soigneusement établi, bien que la durée d'une oscillation libre du balancier soit de près de 10 minutes (559 secondes), chaque mesure exige seulement 20 à 25 minutes; avec la durée de déballage, de mise en place et d'emballage, chaque station exige à peu près 3 heures.

L'appareil emballé pèse environ 58^{kg}; il est aisément porté par deux hommes, et le trépied par un troisième.

Les observations dans le tunnel, au nombre de 16, ont pu être effectuées en 5 séjours de 13 à 16 heures chacun, transports compris; pour 3 d'entre elles, il a été fait, à titre de contrôle, 8 azimuts.

Le tunnel principal est orienté sensiblement du Nord-Ouest au Sud-Est; il a un peu moins de 20^{km}, des chambres de 3^{m} sur 3^{m} et $2^{m},50$ de hauteur sont creusées de kilomètre en kilomètre sur le côté Ouest; de 5^{km} en 5^{km} elles sont remplacées par des chambres plus grandes de 4^{m} sur 6^{m}. C'est au centre de chacune de ces chambres que j'ai fait mes mesures. Au milieu du tunnel est une station de garage, dont je me suis tenu éloigné. J'ai fait aussi deux mesures dans l'axe de la voie.

Ces cavités, tunnel et chambres, produisent à elles seules, indépendamment du relief extérieur, une action considérable, différente suivant qu'il s'agit du tunnel, des petites chambres, ou des grandes chambres. Mais la symétrie de ces cavités donnerait aux rayons de courbure principaux du géoïde la direction parallèle et perpendiculaire au tunnel. Dans l'azimut perpendiculaire au tunnel, l'action est entièrement due au relief extérieur de la chaîne qui surmonte le tunnel, et indépendante du tunnel.

Par suite de cette circonstance, le simple relevé des résultats bruts des observations me permettait, dès le retour, d'affirmer que l'ellipticité du géoïde dépasse 50 à 100 fois celle de l'ellipsoïde terrestre de Bessel; elle est très variable en grandeur et en direction dans l'intérieur du tunnel, et très différente de ce qu'elle est à l'extérieur.

Il restait à tirer de ces mesures brutes la forme du géoïde, tel qu'il serait à l'intérieur de la montagne suivant la direction du tunnel, sans que celui-ci fût percé. Il fallait pour cela calculer les actions locales dues à la forme du tunnel, aux voûtes, au ballast, à la forme des chambres, etc. Ce travail délicat me demanda plusieurs mois, et me permit d'énoncer sous une

forme beaucoup plus précise les résultats définitifs. La forme la plus saisissante est celle qui montre les énormes variations des rayons de courbure du géoïde et de leur direction en suivant la ligne du tunnel (¹). Je rappelle que l'ellipsoïde général qui convient à l'ensemble de la Terre a pour rayon équatorial 6378^{km}, et pour rayon polaire 6356^{km}.

Les deux rayons de courbure principaux de la Terre dans l'intérieur de la montagne, le long de l'axe du tunnel.

Chambres.	R_1 en km.	R_2 en km.	Azimut de R_1 (²).
I..........	6210	6560	+ 56°
II..........	6360	6400	— 41
IV..........	5950	6870	— 1
V..........	5940	6890	— 23
VI..........	5730	7170	— 27
VII..........	5840	7030	— 14
VIII..........	5950	6870	— 13
XI..........	6010	6800	— 21
XII..........	5860	6990	— 5
XIII..........	6290	6470	+ 10
XIV..........	6140	6640	— 2
XV..........	6220	6530	— 14
XVI..........	6240	6540	+ 58
XVII..........	6110	6680	+ 24
XVIII..........	6230	6540	+ 79

La plus grande et la plus petite différence se trouvent dans la moitié nord du tunnel.

En reportant sur un croquis géographique la direction des excès de masse et celle des déficits de masse qu'on tire de ce Tableau, on constate facilement que dans la moitié nord l'ellipticité est commandée surtout par les déficits concordants de la vallée du Rhône, du ravin de la Saltine et de la Cherasca, tandis que dans la moitié sud, c'est l'énorme excès de masse du Monte Leone dont l'influence domine, un peu troublée par les ravins de la Diveria et de la Cherasca.

Ces énormes variations de courbure sur une distance de quelques kilomètres correspondent à des bosses ou à des creux de la surface de niveau

(¹) 95. Tableau XI, p. 221.

(²) Les azimuts sont positifs à partir de l'axe du tunnel en tournant du NW au N.

diversement orientés, mais qui s'écartent extrêmement peu de l'ellipsoïde général et sont probablement indécelables par tout autre procédé de mesure.

87. 1906. **Mouvement du pôle à la surface de la Terre.**

Les courbes publiées par M. Albrecht représentent la position du pôle instantané de rotation de la Terre depuis 1890. Les astronomes cherchent à les représenter par une série de termes périodiques; il m'a paru intéressant de les discuter en dehors de toute idée préconçue, ce qui m'a conduit aux indications suivantes :

Le mouvement du pôle se compose :

1° D'un petit mouvement périodique d'un mois lunaire d'origine externe (amplitude 0",042 environ);

2° De mouvements produits par des causes internes agissant quelquefois d'une manière brusque à des époques très variées;

3° Du mouvement naturel amorti consécutif à ces variations brusques.

Une telle variation brusque énorme s'est produite en mai 1892; son extinction graduelle a duré très régulièrement jusqu'en 1895. Un grand changement en 1891 paraît avoir coïncidé avec le tremblement de terre du 28 octobre 1891 au Japon.

Je n'ai pas eu le loisir de soumettre au même examen les courbes de ces dernières années, qui fourniraient, malheureusement, l'occasion de reconnaître si la coïncidence des variations brusques et des tremblements de terre est un fait général.

APERÇU D'ENSEMBLE.

Le mode de classement que j'ai adopté dans cette Notice pour en rendre la consultation plus facile ne met pas assez en évidence le lien qui unit toutes mes recherches; deux mots me semblent nécessaires à ce sujet.

Je n'ai pas cherché à découvrir des phénomènes d'une nouveauté vraiment imprévue et quasi paradoxale. Me contentant de nouveautés de détail, j'ai surtout cherché à mieux comprendre et mieux expliquer les phénomènes déjà connus dans leurs traits principaux. La nature même de l'enseignement constamment varié du Collège de France m'en faisait rencontrer pour ainsi dire à chaque pas; de là ces Notes ou courts Mémoires qui portent sur des sujets chaque année différents, et qui s'étendent à presque tout le domaine de la Physique pure et de la Physique mathématique. Malgré cet éparpillement apparent, on reconnaîtra facilement que Notes, Mémoires ou Livres correspondent à un petit nombre de curiosités dominantes :

En Physique théorique ou expérimentale, c'est le rôle des actions moléculaires dans les solides cristallins homogènes ou hétérogènes, dans les liquides, dans les gaz, et tout particulièrement les diverses explications possibles des phénomènes irréversibles, viscosité, réactivité, déformations permanentes, frottement des solides, résistance des fluides, qui n'a pas cessé un instant de me préoccuper, et qui m'a conduit à étudier un type de structure possible des métaux industriels aussi bien que la stabilité des aéroplanes (18, 21, 25, 42, 54, 55, 57, 58, 60, 62, 64, 72, 79, 84, 88, 90, 92, 94, 101, 102. — 13, 22, 39, 80, 97, 98, 99, 103, 106).

J'ai insisté à diverses reprises sur le rôle, à mon avis fondamental, de l'instabilité, associée au rayonnement, dans la production de phénomènes irréversibles. (*Notice*, p. 19-20.)

En Physique mathématique, c'est l'influence des conditions à la frontière soit dans certains problèmes particuliers de type classique, soit au contraire dans des problèmes généraux d'un type encore rebelle aux mé-

thodes générales (11, 13, 31, 36, 37, 38, 52, 63, 70, 71, 73, 75, 77, 83, 89, 104, 105).

En Physique du globe, c'est l'étude du globe tel qu'il est et non réduit à un schéma suffisant pour l'Astronomie, et la théorie, à laquelle j'attache quelque importance, des mélanges, précipitations et envahissements qui peuvent se produire aux confins de deux zones de vents de force inégale et inégalement humides (29, 30, 41, 44, 46, 47, 48, 49, 59, 65, 66, 67, 76, 85, 86, 87, 95).

Peut-être trouvera-t-on dans tout cela trop de Mathématiques pour un physicien, et à coup sûr pas assez pour un mathématicien. Il me semble que les remarques sur la capacité des fils doublés (7), les observations sur les chronomètres (59) et sur les courbures du géoïde dans le tunnel du Simplon (95) sont d'un pur physicien, ces dernières même assez délicates et inattendues; c'est aussi le point de vue expérimental qui domine dans les Leçons sur la viscosité des liquides et des gaz (92). Beaucoup plus nombreux sont les Mémoires de Physique théorique, ceux dans lesquels les Mathématiques sont un auxiliaire indispensable, mais où la difficulté réelle qu'il s'agit de résoudre est d'ordre physique. Je signalerai en particulier le Mémoire sur les *Vents contigus et les Nuages* (p. 51-60). Plus rares, au contraire, sont les Notes ou Mémoires de Physique mathématique à proprement parler (2, 11, 15, 22, 58, 62, 73, 83, 104, 105, 106), mais j'attache quelque importance aux derniers (p. 75).

M. B. 1910.

46400 Paris. — Imprimerie Gauthier-Villars, quai des Grands-Augustins, 55.